Cálculo Diferencial e Integral II — Exame ou repescagem de teste, 28/1/2013

2012/13, 1º semestre — ERC, EIC(TP), EGI, EE

Para repetição do 1º teste considere as perguntas 1 a 6.
Para repetição do 2º teste considere as perguntas 7 a 12.
Para exame considere todas as perguntas.

---

1. Considere $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0,\ y \geq 0,\ 0 \leq z \leq \min(1-x^2, 1-y^2)\}$. Calcule
$$\iiint_V z\,dx\,dy\,dz.$$

2. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por
$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 \operatorname{sen} y}{\sqrt{x^2+y^2}}, & \text{se } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$
Determine as derivadas parciais de f aonde existirem e decida aonde a função é diferenciável.

3. Seja $\psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ uma função de classe $C^1(\mathbb{R}^2)$ cujo determinante da matriz jacobiana satisfaz $\det J_\psi(x,y) = 0$ se e só se $(x,y) = (1,0)$.
   a) Determine em que pontos se anula o determinante da matriz jacobiana da função G definida por $G(x,y) = \psi(x^2-y^2, xy)$.
   b) Mostre que existe uma vizinhança de $(1,1)$ em que a restrição de G é uma bijecção.

4. Seja $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definida por $g(x,y,z) = e^{x^2+xy+y^2} + z^2 - x^4$. Justifique que g possui ou não um extremo local em $(0,0,0)$ e classifique-o.

5. Mostre que o sistema
$$\begin{cases} x^2 + y + e^{xz} + \log(y - z + 2w) = 1, \\ xw + e^{yzw} + z = 2 \end{cases}$$
define (z,w) como uma função C^1 de (x,y) numa vizinhança de $(x,y,z,w) = (0,0,1,1)$ e calcule $\frac{\partial z}{\partial x}(0,0)$.

6. Considere uma função $\chi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definida por
$$\chi(x,y,z) = \begin{cases} x+y, & \text{se } x+y+z = 1, \\ 1, & \text{se } x+y+z \neq 1. \end{cases}$$
   a) Estude a função χ quanto a continuidade.
   b) Decida se a função χ é ou não integrável em $[0,1]^3$ e, na afirmativa, qual o valor do integral.

7. Seja $A \subset \mathbb{R}^2$ a região limitada pelas rectas $2x + y = 1$, $2x + y = 2$, $y - x = 1$ e $y - x = 0$. Use uma transformação linear conveniente para definir uma mudança de coordenadas que transforme A num intervalo limitado e use-a para calcular o integral

$$\iint_A \log(y - x + 2)e^{2x+y}\, dx\, dy.$$

8. Calcule usando coordenadas polares

$$\iint_B \sqrt{x^2 + y^2}\, dx\, dy$$

em que $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{x^2 + y^2} < \arctan(y/x),\ x > 0,\ y > 0\}$.

9. Calcule a massa da linha de intersecção das superfícies $z = x^2 + y^2$ e $z = 1 - \sqrt{x^2 + y^2}$ supondo que tem uma densidade $D(x, y, z) = 1 + x^2$.

10. Considere o campo $G : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \to \mathbb{R}^2$ definido por

$$G(x, y) = \frac{1}{x^2 + y^2}(x - 2y, 2x + y).$$

a) Calcule o integral

$$\oint_L G \cdot dr$$

em que L é a linha parametrizada por $r(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$, $t \in [0, 2\pi]$.

b) Decida se G é conservativo em (i) $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ e em[1] (ii) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y < |x|\}$.

11. Calcule a área da superfície $S = \big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = y^2 + z^2, y^2 + z^2 \leq 1\big\}$.

12. Explique porque se pode dizer que um integral

$$\iint_T (x + z^3, 2y, x - 2z) \cdot \nu\, dS,$$

com T uma superfície regular que é fronteira de um aberto limitado $\mathbb{R}^3$ e ν uma normal unitária "exterior", é igual ao volume da região limitada por T.

[1] O enunciado desta questão foi corrigido. A questão como apresntada na prova era substancialmente mais simples mas menos interessante.