Cálculo Diferencial e Integral II

2º Exame

Campus da Alameda **9 de Julho de 2007, 9 horas**

Engenharia Biológica, Engenharia Biomédica,
Engenharia Física, Engenharia de Materiais, Engenharia Química,
Matemática Aplicada e Computação, Química

Apresente todos os cálculos e justificações relevantes

I. 1. Calcule o volume do subconjunto de $\mathbb{R}^3$ definido por

$$V = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 2(x^2+y^2) \leq z \leq 1 + x^2 + y^2, |y| \leq x\right\}.$$

2. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua, $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| \leq 1\}$ e considere o integral

$$\int_A f(x^2 - y^2)\, dx\, dy.$$

Use as coordenadas definidas por

$$\begin{cases} u = x + y, \\ v = x - y, \end{cases}$$

para obter uma expressão para aquele integral na forma de um integral iterado $\int_{\cdots}^{\cdots} \left(\int_{\cdots}^{\cdots} \ldots\, du\right) dv$.

II. 1. Para cada $k \in \mathbb{N}_1$ considere uma função $g_k : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$g_k(x,y) = e^{\frac{x+y}{k}} \operatorname{arctg}(kx).$$

a) Para cada $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ calcule $g(x,y) = \lim_{k\to\infty} g_k(x,y)$.

b) Estude g quanto a continuidade e decida se a convergência é ou não uniforme em $[-1,1]^2$.

c) Decida se g é ou não integrável em $[-1,1]^2$ e, se optar pela afirmativa, calcule

$$\int_{[-1,1]^2} g.$$

2. Considere uma função $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ que tem a forma $F(x,y) = \phi(x^2 - y^2, xy)$ para uma certa função $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ diferenciável. Exprima as derivadas parciais de F em termos de derivadas parciais de ϕ calculadas em pontos convenientes.

3. Considere o sistema:

$$\begin{cases} \log(x+y+z+1)+e^x = 1, \\ \log(x^2+y^2+z^2+1)+e^y+e^z = 2. \end{cases}$$

a) Mostre que o sistema define implicitamente (x, y) como uma função C^1 de z, $(x, y) = \psi(z)$, numa vizinhança de $(0, 0, 0)$.

b) Determine a derivada em[1] 0 da função ψ cuja existência garantiu na alínea anterior.

III. Por integração adequada de ambos os membros da identidade

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{+\infty} x^k, \qquad \text{se } |x| < 1.$$

obtenha a soma da série

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(k+1)2^{k+1}}.$$

IV. Considere a função $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $h(x, y) = e^{3xy} - (x + y)^2$. Decida se:

a) h possui ou não pontos de extremo absoluto.

b) $(0, 0)$ é ou não um ponto de extremo local de h e, se optar pela afirmativa, classifique-o quanto a ser um ponto de máximo ou mínimo local.

V. 1. Decida se o campo $(x, y) \mapsto \left(\frac{y}{1+x^2y^2}, \frac{x}{1+x^2y^2}\right)$ é ou não conservativo em $\mathbb{R}^2$. Se optar pela afirmativa determine um potencial.

2. Calcule o fluxo do campo $G : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definido por $G(x, y, z) = (yz, xz, xy)$ através da superfície definida por $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1, z > 0\}$ com direcção da normal unitária com terceira componente positiva.

3. Seja $\theta : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^1. Calcule o fluxo do rotacional de um campo da forma

$$\mathbb{R}^3 \ni (x, y, z) \mapsto H(x, y, z) = (x^2y(z-1), xy^2(z-1), \theta(x, y)(z^2 - z))$$

através da superfície definida por $x^2 + y^2 = 1$, $z \in]0, 1[$, com uma normal unitária sobre aquela superfície tendo primeira coordenada positiva em $(1, 0, 1/2)$.

[1] A vermelho é indicada uma correcção ao enunciado original.