TÉCNICO LISBOA

Cálculo Diferencial e Integral II
Repetição de Testes e Exame (Versão A)

LEIC-T, LETI, LEE, LEGI

2 de Julho de 2018

Para resolver um teste considere a secção respectiva. Para resolver o exame considere todas as perguntas. Justifique adequadamente todas as respostas.

1º Teste

(4) 1. a) Mude a ordem de integração para calcular

$$\int_0^1 \left(\int_{\sqrt[3]{y}}^1 \cos(\pi x^4)\, dx \right) dy.$$

b) Determine o volume de $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \le z \le (x-1)^2, 0 \le y \le 1-(x-1)^2, x \le 1\}$.

(3) 2. Considere a função $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definida por

$$g(x,y,z) = \begin{cases} \frac{x^3 z}{x^2+y^2+z^2}, & \text{se } (x,y,z) \neq (0,0,0), \\ 0, & \text{se } (x,y,z) = (0,0,0). \end{cases}$$

Decida se g é diferenciável em $(0,0,0)$.

(4) 3. Seja $G : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função de classe $C^2(\mathbb{R}^2)$ e considere uma função $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $F(x,y) = G(x-y^2, x^2-y)$.

a) Exprima ∇F em termos de ∇G.

b) Exprima $\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(1,1)$ em termos de derivadas parciais adequadas de G.

(4) 4. Considere a função definida por $f(x,y) = xy - x^2 y + \frac{1}{y}$.

a) Decida se f possui extremos locais e, na afirmativa, localize-os.

b) Decida se a restrição de f ao conjunto $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : xy \le 1, x \ge \frac{1}{2}, y \ge \frac{1}{2}\}$ possui ou não pontos de extremo absoluto e, na afirmativa, localize-os.

(3) 5. Considere o sistema de equações

$$\begin{cases} x^2 + y^4 = e^{xyz}, \\ x^2 + z^2 = 4\cos(xyz). \end{cases}$$

a) Mostre que o sistema define (y,z) como uma função C^1 de x, $(y,z) = \alpha(x)$, para (x,y,z) numa vizinhança suficientemente pequena de $(1,0,\sqrt{3})$.

b) Calcule $\alpha'(1)$.

(2) 6. Justifique que o contradomínio da função $h : \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + e^{y^2} \le 4\} \to \mathbb{R}$, definida por $h(x,y) = |y+x| e^{x\sqrt{y^2+1}}$, é um intervalo $[0,c]$ com $c > 0$.

2º Teste

(4) 7. Considere a superfície

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : y = x^2 + z^2, 1 \leq y \leq 4\}.$$

Calcule a área de S.

(3) 8. Calcule o volume da região de $\mathbb{R}^3$ definida por

$$U = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 1 - \sqrt{x^2+y^2} \geq z \geq x^2 + y^2 \geq \frac{1}{4}, y \geq x\right\}.$$

(4) 9. Seja $M = \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x-y)^2 + z^2 = 5\big\}$.

a) Justifique que M é uma variedade diferenciável e determine a sua dimensão.

b) Determine $N_M(1,0,2)$ e $T_M(1,0,2)$, respectivamente o espaço normal e o espaço tangente a M no ponto $(1,0,2)$.

(3) 10. Calcule o integral de linha

$$\int_L \frac{y}{1+x^2y^2}\, dx + \frac{x}{1+x^2y^2}\, dy$$

em que L é uma linha de classe C^1 unindo a origem a um ponto da hipérbole $xy = 1$.

(3) 11. Seja $H : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definido por

$$H(x,y,z) = (x + \operatorname{sen}(yz), y + \cos(xz), z^3 + \operatorname{arctg}(xy)).$$

Calcule

$$\iint_{\partial B_1(0,0,0)} H \cdot \nu \, dS,$$

em que ν é a normal unitária exterior a $B_1(0,0,0)$.

(3) 12. Seja $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por $F(x,y,z) = (-y, x, z^2 - 1)$ e considere a superfície

$$S = \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = 4 - x^2 - y^2, 0 < z < 1\big\}.$$

Calcule

$$\iint_S \operatorname{rot} F \cdot \nu \, dS$$

em que ν designa a normal unitária contínua a S tal que $\nu \cdot (1,0,0) > 0$ nos pontos de S com $x > 0$.