

## Cálculo Diferencial e Integral II

### 1º Teste (Versão B)

LEIC-TP, LETI, LEE, LEGI

21 de Abril de 2018

*Justifique adequadamente todas as respostas.*

- (4,0) 1. a) Seja  $V = \{(x, y, z) \in [0, 1]^3 \subset \mathbb{R}^3 : 1 - x - y \leq z \leq 1 - \sqrt{x^2 + y^2}\}$  e  $f : V \rightarrow \mathbb{R}$  uma função integrável. Exprima o integral

$$\iiint_V f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz$$

na forma de um integral iterado  $\int_*^* (\int_*^* (\int_*^* f(x, y, z) \, dx) \, dy) \, dz$ .

- b) Troque a ordem de integração de

$$\int_0^1 \left( \int_{\sqrt{y}}^1 x^5 \operatorname{sen}(yx^2) \, dx \right) dy$$

e use a expressão assim obtida para calcular o valor do integral.

- (3,0) 2. Considere uma função definida num subconjunto  $D$  de  $\mathbb{R}^2$  por

$$f(x, y) = \frac{\sqrt{1+x-y}}{x+y}$$

- a) Determine o domínio  $D$  de  $f$ .  
 b) Determine  $\operatorname{int} D$ ,  $\partial D$  e  $\overline{D}$  e decida se  $D$  é aberto, fechado, conexo ou limitado.  
 c) Decida se  $f$  é ou não prolongável por continuidade a  $(0, 0)$ .

- (4,0) 3. Considere a função  $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$h(x, y) = \begin{cases} \frac{y \operatorname{sen} x}{\sqrt{y^2 + \operatorname{sen}^2 x}}, & \text{se } y \neq 0 \text{ ou } \operatorname{sen} x \neq 0, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

- a) Mostre que  $h$  é contínua em  $(0, 0)$ .  
 b) Decida se  $h$  é ou não diferenciável em  $(0, 0)$ .

- (4,0) 4. Considere funções  $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  com  $F \in C^2(\mathbb{R}^3)$  e  $G : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$G(x, y, z) = F(xy, x^2 + y^2, x^2 - z^2).$$

- a) Calcule a derivada dirigida  $D_{(-1,1,1)}G(0, 0, 1)$ .  
 b) Exprima  $\frac{\partial^2 G}{\partial z^2}(0, 0, 1)$  em termos de derivadas parciais de  $F$  adequadas.

- (3,0) 5. Considere uma função  $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $g(x, y) = 2e^{x^2+y^2} - y^2 - x^4$ .

- a) Mostre que  $g$  possui um único ponto de estacionaridade em  $(0, 0)$ .  
 b) Decida se  $(0, 0)$  é um ponto de máximo local, ou mínimo local ou um ponto de sela.

- (2,0) 6. Seja  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  uma função contínua e seja  $G$  a função definida por

$$G(x, y) = F(e^{x+y} + x^2, e^{x-y} + y^2).$$

Mostre que  $F$  tem um mínimo local em  $(1, 1)$  se e só se  $G$  tem um mínimo local em  $(0, 0)$ .