

Cálculo Diferencial e Integral II

2º Teste (Versão B)

LEIC-T, LETI, LEE, LEGI

11 de Junho de 2018

Justifique adequadamente todas as respostas.

- (4) 1. Considere o subconjunto M de \mathbb{R}^3 definido por

$$\begin{cases} x^4 + y^2 = 1 \\ y^2 + z^2 = 4 \end{cases}$$

- a) Justifique que M é uma variedade diferenciável e indique a sua dimensão.
 b) Determine o espaço normal e o espaço tangente a M no ponto $(x, y, z) = (0, 1, \sqrt{3})$.

- (4) 2. Seja $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 2, x \geq 0, y^2 - x^2 \leq 1, x^2 + y^2 \leq 9\}$. Use as coordenadas definidas por

$$\begin{cases} u = x^2 + y^2 \\ v = y^2 - x^2 \end{cases}$$

para calcular

$$\iint_B (x^2 + y^2)xy \, dx \, dy.$$

- (4) 3. Calcule

$$\iiint_A y \, dx \, dy \, dz$$

em que $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, 0 \leq y \leq x, 0 \leq z \leq \sqrt{x^2 + y^2}\}$.

- (3) 4. Calcule o integral de linha

$$\int_L (y^2 - x^2) \, dx + 2xy \, dy$$

em que L é uma linha de classe C^1 unindo um ponto da recta $x = \sqrt{3}y$ a um ponto da recta $x = -\sqrt{3}y$.

- (3) 5. Seja h uma função definida em \mathbb{R}^2 com valores reais não negativos e de classe C^1 .

Considere a região U definida por

$$U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq z \leq h(x, y), x^2 + y^2 \leq 1\},$$

a superfície S definida por

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = h(x, y), x^2 + y^2 \leq 1\},$$

e o campo vectorial $G : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ definido por

$$G(x, y, z) = (-xy, x^2, yz).$$

Aplice o teorema da divergência a G em U para mostrar que o fluxo $\iint_S G \cdot \nu \, dS$, com ν uma normal unitária contínua sobre S num sentido por si arbitrado, não depende de h .

- (2) 6. Seja $H : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por $H(x, y, z) = (xy, x^2, -yz)$.

a) Determine um campo $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $\text{rot } F = H$.

b) Seja L uma linha fechada de classe C^1 no plano $x - y = 0$. Calcule o integral de linha $\oint_L F \cdot dr$.